Данная статья не вошла в окончательный вариант сборника «Бренд Нижегородской области: предпосылки и концепция формирования. Нижний Новгород, изд. НИСОЦ, 2012.»

Д.И. Иудин

ФРАКТАЛЬНАЯ СТРУКТУРА МЕГАПОЛИСА

В своей замете я бы хотел поделиться идеей подхода к проблеме брендинга с естественнонаучных позиций, в частности, с позиции теории сложных систем. Когда мы рассуждаем об имидже, репутации и брэнде человека, города или предприятия мы имеем в виду уникальную жизнеспособную, развивающуюся систему. Такая система в рамках естественнонаучного подхода характеризуется такими универсальными категориями как метаболизм, иерархия и структура. Мотивация заключается здесь в соблазнительной возможности померить уникальное явление универсальными средствами. Простой пример: дактилоскопия отпечатков пальцев – универсальный метод – уникальный результат. Есть очевидные потери в наглядности: по вашим отпечаткам пальцев вас даже мать родная не узнает. Но есть заметный выигрыш в точности: может быть много похожих на вас людей, но нет ни одного с таким же дактилоскопическим узором.

Точно так же обстоит дело и с мегаполисами. Каждый, кто летал на самолете, знает, как выглядят города с высоты - примерно одинаково - мозаичный кластер светящихся огней. Отличить по виду этих огней один город от другого на глаз не представляется возможным. Нужен инструментарий и критерий. Нужна дактилоскопия структуры. Мой основной тезис заключается в том, что фрактальная геометрия является своеобразной дактилоскопией сложных развивающихся структур и, в частности, структуры мегаполиса.

Что же такое фракталы, фрактальная геометрия и фрактальная структура?

Несмотря на широкое распространение, понятие фрактала до сих пор не имеет четкого и строгого определения. По словам Федера – одного из наиболее ярких апологетов фрактальной геометрии – ее основоположник Б. Мандельброт в частной беседе дал достаточно общее определение "фракталом называется структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому" [цит. по 1, с. 19]. Однако это определение не дает полного представления о разнообразии объектов, которые относят к фракталам. Так, Фокнер [2] подчеркивает, что определить фракталы в математике столь же сложно, как и определить, что такое жизнь в биологии. Можно лишь перечислить некоторые свойства, которыми (не обязательно всеми) могут обладать эти объекты. Обычно, если говорят, что множество F является фракталом, то имеют в виду следующее:

1) F имеет тонкую структуру, т.е. детали произвольно малых масштабов.

2) F является слишком нерегулярным для того, чтобы описываться традиционной геометрией, как локально, так и глобально.

3) F обладает некоторым самоподобием, возможно приблизительным или статистическим.

4) Обычно как-либо определенная "фрактальная размерность" F больше, чем его топологическая размерность.

5) Во многих интересных случаях множество F определяется очень просто, возможно рекурсивно.

Четвертое из этих свойств соответствует первоначальному определению, данному Б. Мандельбротом [3, 4], причем под фрактальной размерностью в этом определении подразумевалась размерность Хаусдорфа-Безиковича.

Главной количественной характеристикой фрактального объекта является его размерность [5]. Наиболее просто понятие размерности можно ввести как количество переменных (или измерений), необходимых для полного описания положения точки в пространстве. Так, для описания положения точки на плоскости необходимо указать две координаты,

поэтому плоскость, также как и любая другая гладкая поверхность, имеет размерность, равную 2, то есть двумерна. Описать положение точки на линии можно с помощью одной координаты, поэтому линия одномерна, ее размерность равна 1. Аналогично, размерность точки равна нулю; пространство, в котором мы все живем, трехмерно. Введенное таким интуитивным образом понятие размерности соответствует тому, что в математике называется топологической размерностью. Эта размерность всегда является целым числом.

Переходя к обсуждению фрактальной размерности, напомним, что физическое содержание самого понятия размерности геометрического объекта, в том числе и фрактального, определяется изменением массы объекта (или числа составляющих его элементов) *M(L)* с ростом его линейных размеров *L* [*Mandelbrot B., 1972; Mandelbrot B., 1977; Mandelbrot B., 1982; Мандельброт Б., 2002*]. Если мы рассмотрим малую часть системы с размерами λL ($\lambda < 1$), то для массы фрагмента мы получим:

$$M(\text{л}L) = \text{л}^{d_f} \cdot M(L) \qquad (1)$$

Решение функционального уравнения (1) имеет простой вид:

$$M(L) = const \cdot L^{d_f} .$$

Так, масса длинного провода меняется линейно с λ, т. е. $d_f = 1$. Для тонкой пластины мы найдем, что $d_f = 2$, а для бруска $d_f = 3$.

Такое физическое определение размерности естественно соотносится с интуитивно понятной возможностью разделения объекта на части. Действительно, в соответствие с этим классическим подходом объект имеет n измерений, если его можно разбить на части гиперплоскостями, которые сами являются $(n - 1)$-мерными объектами. Так мы получаем рекуррентное определение размерности, которое предполагает, что объемы – части пространства, поверхности – границы объемов, линии – границы поверхностей, а точки – границы линий.

Будем считать объект, который можно воспроизвести путем увеличения какой-либо его части, самоподобным, или инвариантным при преобразовании подобия, т. е. фракталом. Возвращаясь к функциональному уравнению (1) можно утверждать, что фрактальным, или самоподобным объектам отвечают решения (1) с нецелым d_f. Для фрактальных объектов величина размерности d_f оказывается меньше размерности объемлющего евклидового пространства $d_f < d$. Таким образом, плотность $\rho(L)$ фрактальных структур уменьшается по степенному закону с ростом их линейных размеров L:

$$\text{с}(\text{л}L) = \frac{M(\text{л}L)}{(\text{л}L)^d} = \text{л}^{d_f - d} \cdot \frac{M(L)}{L^d} = \text{л}^{d_f - d} \cdot \text{с}(L) \qquad (2)$$

Последнее соотношение дает нам интуитивно понятное определение фрактального объекта: фракталом является структура с дырками на всех масштабах. Чем больше линейные размеры фрактала, тем больших размеров дырки мы в нем можем найти. Отсюда и следует падение плотности фрактала с ростом его линейных масштабов.

Рассмотрим классический пример – салфетку Серпинского. Ее построение начинается с равностороннего треугольника с единичной стороной (элемент 1 на рис. 1). Используя три таких треугольника можно построить пирамиду со стороной, превышающей вдвое длину стороны исходного треугольника (элемент 2 на рис. 1). Далее, как видно из рисунка, процедура повторяется (элементы 2÷5 на рис. 1). В результате и образуется салфетка Серпинского. Используя функциональное уравнение (1) мы найдем, что фрактальная размерность салфетки Серпинского составляет:

$$d_f = \frac{\ln(3)}{\ln(2)} \approx 1{,}5850.$$

Самоподобие салфетки Серпинского очевидно: любой являющийся ее частью непустой треугольник является копией любого другого (включая и всю салфетку). Нетрудно убедиться в том, что плотность салфетки Серпинского стремиться к нулю. Действительно, если плотность исходного единичного треугольника равна единице, то плотность каждой последующей конструкции составляет три четверти от плотности предыдущей и плотности последовательных конструкций на рисунке 1 образуют бесконечную

убывающую геометрическую последовательность. Уменьшение плотности с ростом масштаба является фундаментальным свойством фрактальных объектов. Так ведет себя, например, плотность жилой застройки мегаполисов.

Обратимся теперь к так называемой триадной кривой Коха, впервые предложенной шведским математиком Хельге фон Кохом в 1904 году. Алгоритм ее построения начинается с прямолинейного отрезка единичной длины. Центральная треть отрезка вырезается, а на его месте надстраивается фиорд из двух отрезков, образующих с вырезанной частью равносторонний треугольник (рис. 2), получается фигура, являющаяся генератором нашего нового фрактала. На последующих шагах построения кривой Коха все прямолинейные отрезки просто заменяются уменьшенными копиями генераторами, то есть их средняя треть вырезается и заменяется фиордом. В результате бесконечного повторения такой несложной процедуры получается очень красивая фигура, любая, сколь угодно малая, часть которой подобна целой конструкции.

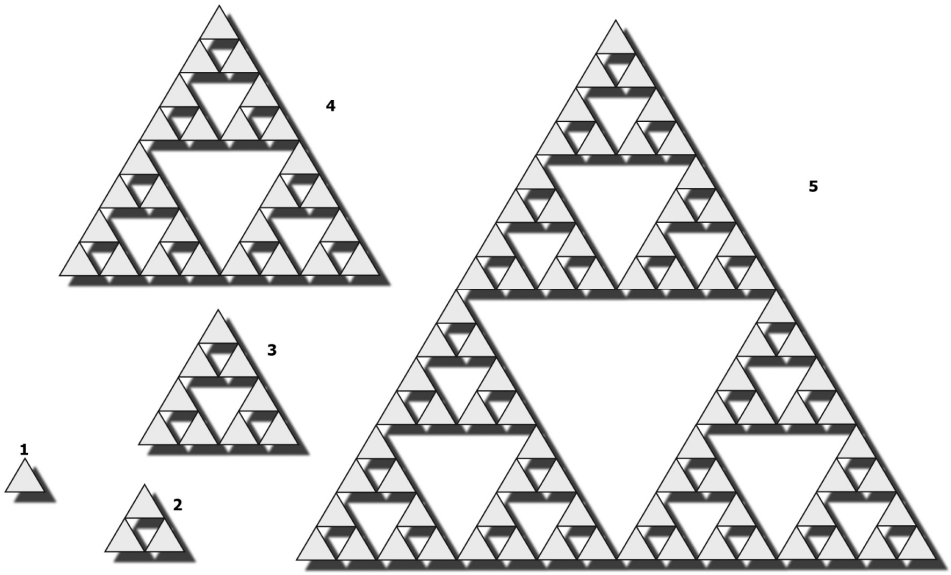

Рис. 1. Изображение итерационной процедуры построения треугольной салфетки Серпинского

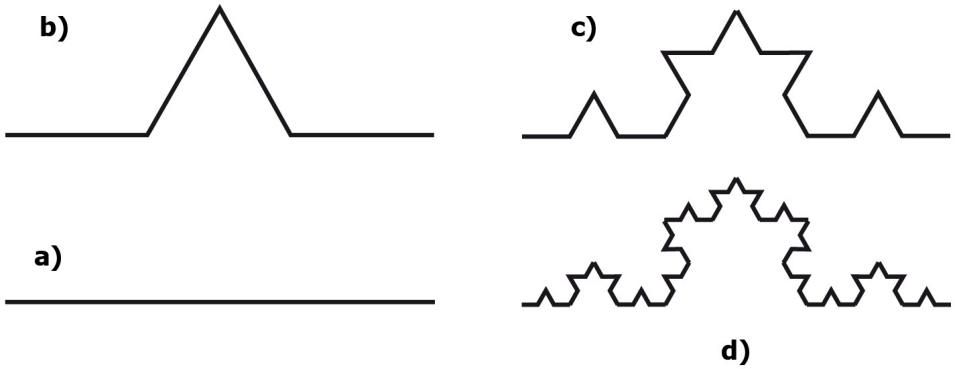

Рис. 2. Изображение итерационной процедуры построения кривой Коха.

Используя функциональное уравнение (1) мы легко можем определить фрактальную размерность кривой Коха:

$$d_f = \frac{\ln(4)}{\ln(3)} \approx 1{,}2619$$

Длина кривой Коха не может быть определена: ее величина зависит от точности измерения и растет при увеличении этой точности. Действительно, на каждом шаге итерационной процедуры, представленной на рис. 2, длина образующейся ломаной увеличивается по сравнению с предыдущей в 4/3 раза и составляет $(4/3)^n$, где n – номер шага процедуры.

Применим теперь описанную выше процедуру Коха сразу для трех отрезков, образующих равносторонний треугольник (рис. 3). На первом шаге итерационной процедуры мы получим звезду Давида, а затем снежинку, граница которой на каждом последующем шаге становится все более изрезанной. Эта фигура с фрактальной границей называется островом Коха.

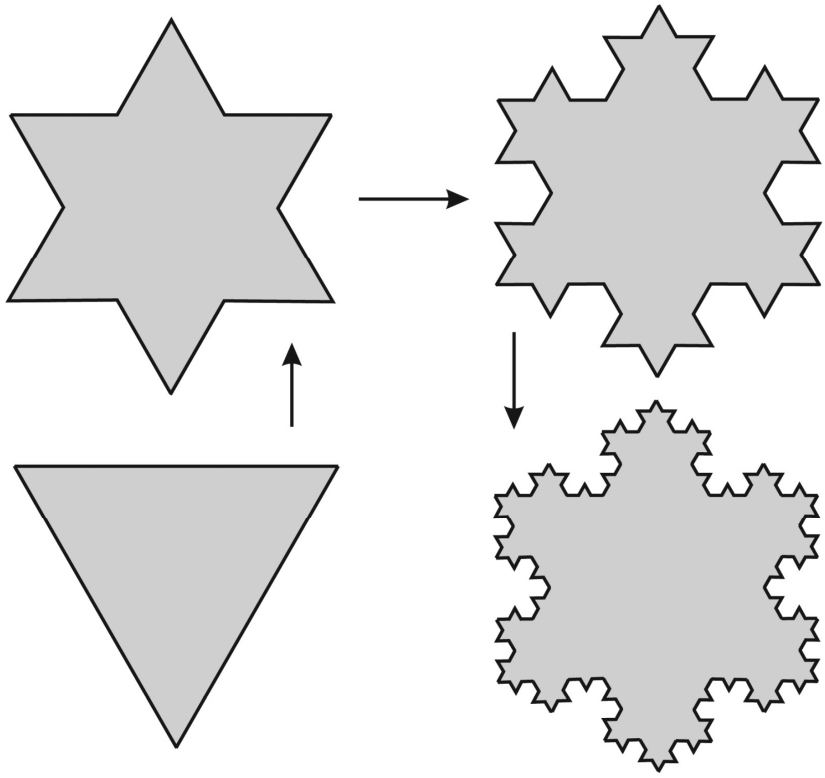

Рис. 3. Изображение итерационной процедуры построения острова Коха.

Очевидно, что периметр острова Коха также как и длина кривой Коха зависит от точности его измерения и увеличивается с ростом этой точности. На n-ом шаге итерационной процедуры периметр составляет

$$P_f = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

Найдем площадь острова Коха. На первом шаге процедуры площадь исходного равностороннего треугольника

$$S_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

увеличивается за счет площади фиордов выступающих с каждой из трех сторон. Очевидно, что площадь одного фиорда составляет одну девятую часть от площади исходного равностороннего треугольника, так что

$$S_1 = S_0 + 3 \cdot \frac{1}{9} \cdot S_0$$

На каждом последующем шаге процедуры площадь острова будет увеличи-

ваться за счет площади новых фиордов, число которых с каждой стороны исходного треугольника будет расти как степень четверки, а площадь будет уменьшаться как степень одной девятой:

$$S_n = S_0 + 3\cdot\left(\frac{1}{9}\cdot S_0 + \frac{4}{9^2}\cdot S_0 + \ldots + \frac{4^{n-1}}{9^n}\cdot S_0\right) = S_0\left(1 + \frac{3}{4}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{4}{9}\right)^i\right) \qquad (5)$$

В выражении (5) справа стоит сумма геометрической прогрессии со знаменателем 4/9, поэтому окончательно мы получаем:

$$S_n = S_0\left(1 + \frac{3}{5}\left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right)\right)$$

При стремлении числа шагов процедуры к бесконечности мы найдем площадь острова Коха:

$$S = \frac{8}{5}\cdot S_0 = \frac{2\sqrt{3}}{5}$$

Мы получили интригующий результат – конечная площадь острова Коха ограничена периметром бесконечной длины. Любопытно взглянуть на это еще и с другой стороны. Дело в том, что форма плоских фигур может быть охарактеризована краевым индексом:

$$\alpha = \frac{\mathrm{P}}{2\sqrt{\mathrm{pA}}},$$

где: P – полный периметр фигуры, включая внутренние границы, если таковые имеются, A – площадь фигуры. Для круга, например, α принимает минимальное возможное значение равное единице, для квадрата $\alpha \approx 1{,}29$. Для острова Коха краевой индекс равен бесконечности [5]!

Ясно, что в реалиях физического мира мы никогда не встречаемся с такого рода бесконечностью. Тем не менее, мы видим, что природа очень часто обращается к подобным аномалиям для решения конкретных проблем. Если рассматривать город как крепость, то самая дешевая крепость - это круг – максимальная площадь защищенного пространства при минимальных капиталовложениях. Вместе с тем мы знаем, что на современном этапе города уже не являются крепостями. Эффективность развитой границы городской среды имеет чрезвычайно важное значение - нельзя представлять себе город как правильную фигуру, растущую во всех направлениях - такой город не жизнеспособен! Обязательно должна присутствовать фрактальная ткань - дырки и сложно развитые границы. В этом случае и поток ресурсов и выброс отработанного материала достигает максимальной эффективности. Развитые границы, в том числе внутренние, играют важную роль в обеспечении метаболизма, жизнеспособности. Более того, точки роста мегаполиса также определяются нюансами его фрактальной структуры.

Итак, в природе широко распространены системы, морфология и поведение которых демонстрируют самоподобие при изменении пространственно-временных интервалов или, как говорят, масштабную инвариантность – один из фундаментальных видов симметрий физического мира, играющих формообразующую роль во Вселенной [6]. Применительно к анализу структуры городов и историко-культурных ландшафтов разработки в рамках фрактальной геометрии немногочисленны и часто носят описательный характер. Сегодня необходим инновационный подход к изучению закономерностей построения и развития градостроительных объектов с применением количественных параметров их описания, основанных на опыте применения методов фрактального и мультифрактального анализа в естественнонаучных дисциплинах [7].

Литература

1. Федер Е. Фракталы: Пер. с англ. – М.: Мир, 1991. – 214 с.
2. Falconer K. J. The Geometry of Fractal Sets. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1985.
3. Mandelbrot B. The fractal geometry of nature. San Francisco: Freeman, 1982. 461p. (Существует русский перевод: Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. – М.: Институт компьютерных исследований, 2002, 656 с.)

4. Mandelbrot B.B. Multifractal measures, especially for the geophysicist // PAGEOPH. – 1989. - V.131, No 1/2. – P. 5-42.
5. Д.И. Иудин, В.Ю. Трахтенгерц, Фрактальные лабиринты. Нелинейные Волны’2006. / Отв. Ред. А.В. Гапонов-Грехов, В.И. Некоркин. – Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2007.
6. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001. – 528 с.
7. Bunde A., Halvin S. Fractals and Disordered Systems. – Berlin: Springer-Verlag, 1995. – 408 p.